Dataprojekt.
Nanovetenskapliga tankeverktyg.

January 18, 2008

Dataprojekt 1: Fourierserier

Två av fysikens mest centrala ekvationer är vågekvationen och värmeledningsekvationen. Båda dessa ekvationer är linjära differentialekvationer som kan studeras med hjälp av fourierserier. I detta projekt skall ni med hjälp av matlab tillämpa era kunskaper om fourierserier på två fysikaliska fenomen som beskrivs av vågekvationen respektive värmeledningsekvationen.

Vågekvationen

På föreläsningarna har problemet med svängningarna hos en gitarrsträng av längd L diskuterats Strängens avvikelse från sitt viloläge $y = y(x,t)$ i en viss

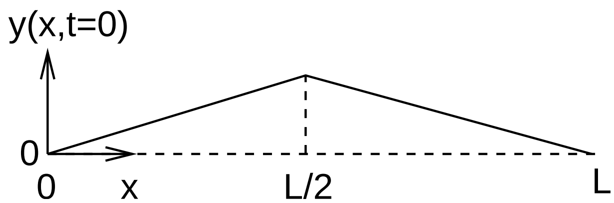

Figure 1: Strängens läge precis innan den släpps, vid tiden $t = 0$.

punkt x på strängen vid tiden t ges av den endimensionella vågekvationen

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial y^2}{\partial t^2}$$

där V är våghastigheten. Lösningen för strängens form när båda ändar är inspända kan skrivas som en fourierserie

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi V t}{L}\right)$$

där $\pi V/L$ är strängens grundfrekvens. Låt oss som i föreläsningskompendiet anta att strängen spänns till att ha formen (se figur 1)

$$y(x,t<0) = \begin{cases} 2Ax/L & 0 < x < L/2 \\ 2A(L-x)/L & L/2 < x < L \end{cases}$$

där A är den maximala avvikelsen (vid $x = L/2$), innan den släpps vid tiden $t = 0$. De olika utvecklingskoefficienterna ges då av

$$S_n = \frac{8A}{n^2\pi^2}(-1)^{(n-1)/2}, n = 1,3,5,.. \qquad S_n = 0, n = 0,2,4,...$$

Problemet består av följande uppgifter:

a) För tiden $t = 0$, precis innan strängen släpps, plotta avvikelsen från viloläget $y(x, t = 0)$ genom att summera upp de första nollskiljda termerna i serien ovan. Gör fyra separata plottar där den första figuren innehåller den första termen $n = 1$, den andra plotten summan av termerna $n = 1, 3, 5$, den tredje plotten summan av termerna $n = 1, 3, ..., 21$ samt den fjärde plotten summan av termerna $n = 1, 3, ..., 101$. Plotta dessutom som referens den exakta avvikelsen $y(x, t < 0)$ given ovan, i var och en av de fyra figurerna.

Analysera och diskutera: Vad blir effekten av att ta med fler och fler termer n? Ungefär hur många termer måste man ta med för att triangelformen i figur 1 skall återskapas "hyfsat"? Vilka delar/aspekter av triangeln beskrivs av termerna med lågt n och vilka beskrivs av termerna med högt n (vad händer t.ex om man tar bor termen $n = 1$ respektive termerna $n = 51, ..101$ ur den fjärde figuren)? Hur kan man förklara detta?

b) Då strängen släpps vid tiden $t = 0$ börjar den vibrera. Strängens utseende för alla möjlige tider $t > 0$ ges av $y(x, t)$. Välj tiden $t = 0.45L/V$, dvs så att $\cos\left(\frac{n\pi Vt}{L}\right) = \cos(0.45n\pi)$, och gör likadana plottar som i uppgift a) [dock utan att ta med triangelformen given av $y(x, t < 0)$ som referens].

Analysera och diskutera: Kommentera eventuella skillnader och likheter mellan de två figurerna i a) och b) utifrån frågorna i a).

c) Den endimensionella vågekvationen ovan ger en förenklad beskrivning av hur en sträng beter sig i verkligheten. Studera strängens avvilkelse vid ett antal tidpunkter (inga plottar behöver presenteras) och beskriv i ord hur avvikelsen $y(x, t)$ förändras över tiden. Baserat på fysikalisk intuition, gissa/spekulera hur en verklig sträng skulle bete sig. Vilka fysikaliska egenskaper hos en riktig sträng beskrivs inte av vår modell? (Här är inte det viktigaste att hitta rätt svar utan att försöka resonera).

Värmeledningsekvationen.

Värme i ett material, t.ex ett metallbestick, "flyter" från områden med hög till områden med låg temperatur, vilket man t.ex kan märka när man på farmors kaffekalas stoppar en silversked i en kopp varmt kaffe. Denna värmeledning beskrivs generellt av värmeledningsekvationen för den lokala temperaturen $T(\mathbf{x},t)$,

$$\kappa\nabla^2 T(\mathbf{x},t) = \frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

där κ är värmeledningskoefficienten. Låt oss anta att ni alltid på farmors kalas brukar hamna mellan faster Elsa och farbror Olle. För att ni vid nästa kalas skall ha något att diskutera med släktingarna förutom hur "ooootroligt det är att ni har blivit så stora, jag minns när..." så betrakta följande problem.

En enkel modell för silverskeden i kaffekoppen är en homogen metallstav (se fig. 3), utan värmeflöde in och ut genom stavens långsidor. Temperaturen ges då av den endimensionella värmeledningsekvationen

$$\kappa\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}.$$

Efter det att skeden har stoppats i kaffekoppen kommer värmen börja spridas från koppen upp mot fingrarna som håller skeden. Om kaffet är riktigt varmt (och skeden är av riktigt silver) kommer man till slut inte kunna hålla i skeden.

Låt oss anta att vi stoppar skeden i kaffet vid tiden $t = 0$. Vid denna tidpunkt beskrivs temperaturfördelningen av en funktion $T(x,0) = f(x)$. Värme leds bra mellan kaffet och skeden och vi kan därför anta att "kaffeändan" för alla tider $t > 0$ håller kaffets temperatur (vi struntar här i att kaffet sakta men säkert svalnar). Fingrarna som håller i skeden leder dock värme dåligt och vi kan anta att skeden är värmeisolerad i "fingerändan". Temperaturen i skeden som funktion av tiden, $T(x,t)$, kan för detta fall kan i princip beräknas analytiskt med de metoder som presenterats under föreläsningen. Dock, för de flesta former på den initiala temperaturfördelningen $f(x)$ blir lösningen mycket komplicerad och det är istället bättre att studera problemet numeriskt, vilket är vad vi skall göra här.

Ett användbart sätt är att skriva derivatorna som differenser och lösa värmeledningsekvationen på ett "gitter", se fig 3. Vi får då värmeledningsekvationen

$$\kappa\frac{T(x_{n+1},t_k) - 2T(x_n,t_k) + T(x_{n-1},t_k)}{\Delta x^2} = \frac{T(x_n,t_{k+1}) - T(x_n,t_k)}{\Delta t}.$$

eller på en praktisk form

$$T(x_n,t_{k+1}) = T(x_n,t_k) + \bar{\kappa}\left[T(x_{n+1},t_k) - 2T(x_n,t_k) + T(x_{n-1},t_k)\right]$$

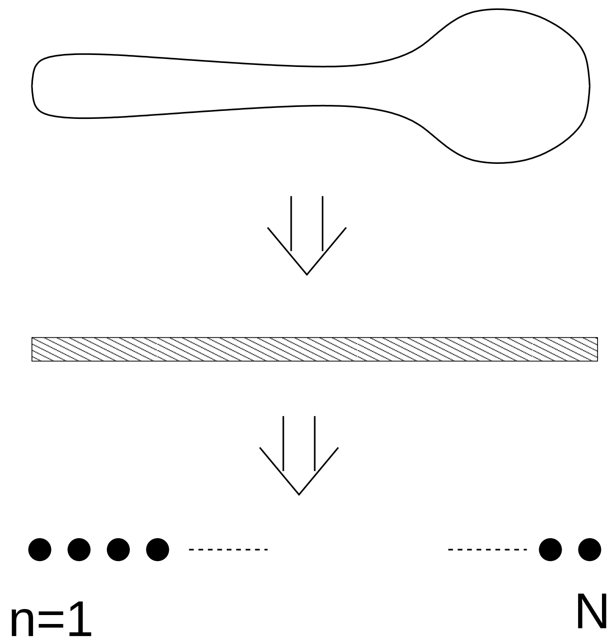

Figure 2: Uppifrån och ner: Silversked, endimensionell modell och gittermodell.

där $\bar{\kappa} = \kappa \Delta t / \Delta x^2$. Känner man till κ, temperaturen i skeden $T(x, 0)$ vid tiden $t = 0$ och villkoren för skedens temperatur i båda ändar vid alla tider kan man "stega" sig fram i tiden (den s.k. Eulers metod), d.v.s. från begynnelsevillkoren vid $t = t_0 = 0$ beräknar man $T(x, t_1)$ och sedan från $T(x, t_1)$ beräknar man $T(x, t_2)$ osv. Gör nu följande för att i detalj bestämma modellen av problemet:

a) Baserat på ett allmänt fysikaliskt resonemang (lufttemperatur, om/hur skeden hållits av någon innan den sätts i koppen etc), gör ett antagande om temperaturfördelningen $f(x)$ (gör en skiss/figur eller beskriv med formler). Bestäm också vilken temperatur det nybryggda kaffet håller och vilken längd L silverskeden har.

b) Antag att värmeledningskoefficienten är $\kappa = 5mm^2/s$. En diskretisering av tiden och skedens längd som ger en tillförlitlig numerisk lösning är $\Delta t = 0.1s$ och $\Delta x = 1mm$, dvs man delar upp skeden i $N = L/\Delta x$ bitar. Detta ger oss den dimensionslösa värmeledningskoefficienten $\bar{\kappa} = \kappa \Delta t / \Delta x^2 =$

0.5. Fundera kring vad som skulle hända om man valde mindre eller större Δx och Δt.

Innan ni fortsätter med uppgifterna nedan, diskutera era antaganden i a) och b) med övningsledaren så att han/hon är införstådd med er modell.

c) Skriv ett matlab-program som numeriskt löser värmeledningsekvationen med de bestämda rand- och begynnelsevillkoren. En isolerad ända innebär att ingen värme flyter in elle ut, dvs $\partial T(x,t)/\partial x = 0$ vilket i differensform blir $T(x_{n+1}, t_k) - T(x_n, t_k) = 0$. Detta kan implementeras i matlab genom att efter varje tidssteg sätta randvärdet $T(x_1, t_k) = T(x_2, t_k)$ (om vi antar att $n = 1$, som i figur 2, motsvarar fingeränden).

d) Kör programmet tills tiden $t = K\Delta t = 10min$, d.v.s. stega $K = 10min/\Delta t$ gånger i tiden. Lagra värdena $T(x_n, t_k)$ för var tionde sekund i en matris. Kör programmet ett antal gånger för olika värden på Δx och Δt och bestäm ungefär hur små man måste välja Δx och Δt för att den numeriska lösningen skall vara tillförlitlig. Gör sedan en tvådimensionell plot (t.ex med kommandot **mesh**) där man ser hur temperaturfördelning ändras över tiden. Notera för vilka Δx och Δt temperaturfördelningen beräknades.

Analysera och diskutera: Hur ser temperaturfördelningen ut vid $t = 1min$ samt vid $t = 10min$? Vad verkar vara mest avgörande för hur temperaturfördelningen utvecklas över tiden, den initiala temeraturfördelnigen (begynnelsevillkoret) eller villkoren för temperaturen vid skedens kanter (randvillkoren)? Kan man förstå detta på ett kvalitativt sätt? (här viktigare att resonera än att ha rätt) Hur lång tid tar det från det att man stoppar ned skeden i kaffet tills man bränner fingrarna, vilket vi kan anta inträffar då skeden i fingeränden blir 50 ^oC (läs t.ex av i figuren)? Hur skulle temperaturfördelningen se ut (enligt vår modell) om man väntade ett par timmar?

e) Resonera kring hur bra modellen beskriver temperaturen hos en verklig silversked med ena ändan i en kaffekopp. Vilka fysikaliska aspekter fångar modellen upp väl och vilka missar den? Notera: det viktiga är här ett fysikaliskt/logiskt resonemang och inte att svaret är helt korrekt.