Projekt 2: Kopplade differentialekvationer

Kopplade differentialekvationer förekommer i många sammanhang inom fysiken, kemin och biologin. I en del enkla fall kan ekvationerna lösas analytiskt, men i de flesta fall måste man ta till numeriska metoder. I matlab finns ett antal rutiner för att numeriskt lösa kopplade differentialekvationer. Dessa beskrivs i avsnitt 14.4 i boken. På föreläsningen har Volterras modell för konkurrerande fiskarter presenterats. Uppgiften går ut på att med hjälp av Volterras kopplade differentialekvationer studera följande problem.

Fiskodlaren B. Mörtén har under en längre tid irriterat sina granne och tillika konkurrent K. Hajmann genom att sälja sina odlade foreller till ett mycket lågt pris, något som tvingat Hajmann till konkursens rand. För att rädda sin fiskodlingsrörelse bestämde sig Hajmann för att ta till ljusskygga metoder och smög sig en mörk natt ner till Mörténs damm och släppte i ett antal glupska gäddor.

Enligt Volterras modell kan det som därfter händer, dvs utvecklingen av mängden foreller $n_f(t)$ och mängden gäddor $n_g(t)$ (här mätt i totala vikten fisk) som funktion av tiden t efter isläppningsögonblicket beskrivas med följande system av ekvationer

$$\frac{dn_f}{dt} = an_f - bn_f n_g$$

$$\frac{dn_g}{dt} = -cn_g + dn_f n_g$$

Låt oss anta att vid isläppningsögonblicket, $t = 0$ fanns det $n_f(0) = 20$ kilo foreller i dammen (just efter Mörténs senaste fiskning) och att Hajmann släppte i $n_g(0) = 5$ kg gäddor (fem hungriga enkilos gäddor). Koefficienten a, som beskriver tillväxttakten av foreller i avsaknad av gäddor, är 0.1 per vecka, d v s det tar ca 7 veckor för forellerna att fördubbla sin mängd. Koefficienten c, som beskriver minskningstakten av gäddor i avsaknad av foreller, är också 0.1 per vecka. Koefficienterna b och d beskriver växelverkan mellan forellerna och gäddorna, dvs b beskriver hur mycket foreller som försvinner pga att de äts upp av gäddorna och d hur mycket nya gäddor som tillkommer genom att de existerande gäddorna kan föröka sig pga av god tillgång på foreller. Antag att $b = 0.01$ och $d = 0.005$ per vecka.

Analysera och diskutera: Hur kan man, utifrån en kvalitativ förståelse av Volterras modell, förklara tecknen framför var och en av de fyra olika termerna i högerleden i ekvationerna ovan, t.ex varför är det $+an_f$ och inte $-an_f$ o.s.v. (notera att a, b, c och d är positiva per definition).

a) Skriv ett matlabprogram som använder **ode45** för att lösa Volterras ekvationer. Skapa en funktion **volterra.m** som definierar de två kopplade differentialekvationerna. Ledning: Se exempel 14.6 i matlabboken.

b) Lös ekvationerna för tiden $0 < t < 200$ veckor. Begynnelsevärdena för $t = 0$ är 20 kilo foreller och 5 kilo gäddor. Plotta (i) mängden foreller och mängden gäddor som funktion av tiden och (ii) mängden foreller som funktion av mängden gäddor.

Analysera och diskutera: Hur utvecklas mängden gäddor och mängden foreller direkt efter isläppningsögonblicket? Hur ser utvecklingen ut över lång tid? Hur kan man förklara detta? Skulle det bli några skillnader om man istället släppte i mycket fler eller mycket färre gäddor?

c) Mörtén, som är mycket förtjust i sin forelldamm, brukar gå ner varje kväll till dammen för att se sina foreller simma omkring. Ett par veckor efter senaste fiskningen börjar han dock tycka att antalet foreller inte ökar som vanligt. Efter hur många veckor börjar mängden foreller minska istället för att fortsätta att öka? Hur lång tid tar det innan mängden gäddor är lika stor som mängden foreller?

Hur har det kommit det sig att Mörtén till skillnad från Hajmann har nått sådana framgångar med sin fiskodling? Anledningen till detta är att Mörtén noga har studerat sina forellers tillväxt och funnit att efter en viss tid slutar forellerna att växa till i antal pga att det inte finns nog med naturlig föda i dammen. Genom att fiska exakt vid denna tidpunkt kan Mörtén optimera sin avkastning. Denna begränsning av antalet foreller pga brist på föda kan beskrivas med Volterras ekvationer genom att lägga till en term $-qn_f^2$ till den första ekvationen ovan.

d) Modifiera matlabprogrammet i a) genom att inkludera termen $-qn_f^2$, med $q = 0.001$. Om det inte Hajmann hade släppt i några gäddor ($n_g = 0$ vid tiden $t = 0$), ungefär hur många veckor hade det tagit innan mängden foreller hade nått sin naturliga begränsning? Hur mycket foreller hade det då funnits?

e) Upprepa uppgift b) med den extra termen $-qn_f^2$.

Analysera och diskutera: Kommentera skillnader och likheter gentemot resultatet i b).

f) Om tiden får löpa på, $t > 200$ veckor, uppnås slutligen ett jämviktsläge. Ungefär hur många veckor tar det innan jämviktsläget uppnås? Hur mycket foreller n_f^* respektive gäddor n_g^* skulle finns det i jämviktsläget.

Mörténs misstankar att allt inte står rätt till i dammen bekräftas en dag när hans systerson som är på besök, efter en kort fisketur i dammen kommer hem med en gädda. Systersonens fiskande ger dock Mörtén en ide: varför inte försöka fiska upp alla fiskar i dammen, något som i sista ändan borde ta kål på alla gäddor och ge Mörtén möjligheten att börja om och plantera in nya foreller. Mörtén, som har många fiskeintresserade syster- och brorsbarn, funderar på att kalla in sina unga släktingar för att hjälpa till under sommarlovet. Skulle detta kunna fungera?

Effekten av fiskande kan beskrivas med Volterras ekvationer genom att lägga till en term $-fn_f$ till den första ekvationen och $-gn_g$ till den andra. Låt oss anta att fisket är lika effektivt för foreller som för gäddor, dvs $f = g$. Låt oss också anta att varje ung släkting bidrar med 0.01 till f, dvs $f = 0.01N$, där N är det totala antalet syster- och brorsbarn.

g) Modifiera matlabprogrammet i d) (dvs behåll termen $-qn_f^2$) genom att inkludera termerna $-fn_f$ och $-fn_g$. Antag att fiskandet börjar då det finns 30 kilo foreller och 10 kilo gäddor i dammen. Undersök jämviktsläget som uppnås vid långa tider när N succesivt ökas från 0. Hur många unga släktingar N^* måste Mörtén kalla in för att vara säker på att han slutligen får upp alla gäddor (antag att $n_g(t) < 0.1$ kilo innebär att alla gäddor är uppe)? Hur lång tid tar det för de N^* syster- och brorsbarnen att reducera mängden gäddor till noll. Hinns detta med under ett typiskt tioveckors sommarlov?

Mörtén, som förstås inte har något mot att ytterligare effektivisera sin forellrörelse, upptäcker med förtjusning att inte nog med att gäddorna fiskas upp, ju fler unga släktingar som fiskar dest fler foreller dras upp, dvs jämviktsläget n_f^* förefaller öka linjärt med N. Varför inte låta ännu fler syster- och brorsbarn hjälpa till och därmed öka vinsten ytterligare! Är detta en klok strategi?

i) Undersök vad som händer med n_f^* om man succesivt fortsätter öka $N > N^*$. Plotta n_f^* som funktion av N för $0 \leq N \leq 10$. Vilka slutsatser kan man dra av resultatet om modellen t.ex skulle beskriva bestånden av torsk och pigghaj i nordsjön.

Analysera och diskutera: Som beskrivs i kompendiet har Volterras modell används med framgång för att beskriva variationer i olika typ av populationer av rovdjur och växtätare. Resonera kring vad som troligtvis behövs för att modellen skall fungera i verkligheten, dvs vilka egenskaper djurpopulationerna behöver ha för att den skall beskrivas av modellen (här är resonemanget viktigare än svaret).

Överkurs, frivilligt: I något av de fall där du anser att Volterras modell inte skulle fungera, finns det något sätt på vilket man skulle kunna förändra/utvidga modellen så att den fungerar bättre?