Projekt 3: Diskret fouriertransform

Diskreta fouriertransformer har stor praktisk användning inom en mängd olika områden, från analys av mätdata till behandling av digital information som ljud och bildfiler. I detta projekt skall ni studera tillämpningar av den diskreta fouriertransformen i en och två dimensioner.

Endimensionell transform

I många intressanta fysikaliska situationer vill vi studera en funktion $f(t_n)$ som bara är definierad för vissa diskreta tidpunkter $t_n = n\Delta t$, $n = 1, 2, 3....$ Detta kan t.ex handla om aktieindex på stockholmsbörsen första dagen varje månad, totala antalet solfläckar som observeras varje år eller antalet måsar som landar på taket till Turning torso varje månad etc. Vissa av dessa funktioner uppvisar en periodicitet som ofta beror på underliggande faktorer, som t.ex är fallet med solfläckarna, medan börskurserna normalt inte uppvisar en sådan periodicitet. Denna periodicitet kan vara svår att se i tidsdomänen men framträder tydligare i frekvensdomänen. Signalen i frekvensdomänen $F(k)$ ges av den diskreta fouriertransformen

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{i2\pi kn/N}$$

där N är totala antalet tidsvärden. Denna diskreta fouriertransform utförs i matlab via kommandot **fft**. Studera exemplet 10.10. i matlabboken och lös följande problem.

Analysera och diskutera: Givet ett visst tidsintervall Δt och ett visst antal tidsvärden N, vilken är den högsta respektive lägsta frekvensen man kan observera i den diskreta fouriertransformens amplitudspektrum.

a) I figur 3 är den totala arbetslösheten i Sverige för varje månad för perioden 1996 till 2007 plottad (källa AMS). I filen **ams.txt**, som kan laddas ner från kursens hemsida, finns varje månads värde lagrat. Ladda filen i matlab och beräkna dess fouriertransform med **fft**. Plotta en figur med arbetslösheten som funktion av tiden samt en figur med amplitudspektrat, absolutbeloppet av den fouriertransformerade arbetslösheten som funktion av frekvens. Då frekvensspektrat är symmetriskt kring mittfrekvensen, den s.k. Nyquistfrekvensen, räcker det att plotta frekvenserna som är lägre

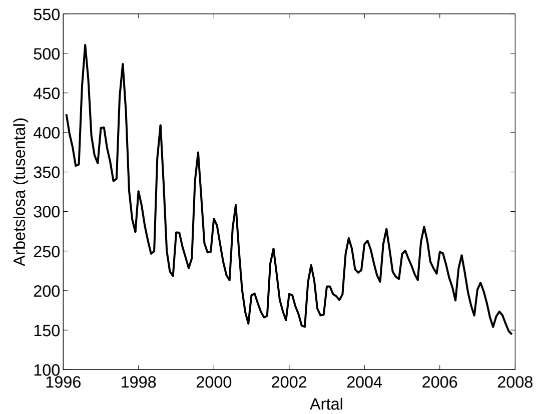

Figure 3: Den totala arbetslösheten under perioden 1996 till och med 2007, i tusental.

än Nyquistfrekvensen. OBS, var noga med att få rätt värden och enheter på axlarna!

Analysera och diskutera: Finns det några frekvenser som dominerar? Om så är fallet, vilka är de motsvarande perioderna i tidsdomänen? Finns det någon förklaring till resultatet (spekulera utifrån vad du vet om hur arbetsmarknaden fungerar!)?

b) I filen **geiger.txt** finns resultatet av en enkel numerisk simulering av antalet registrerade "klick" per sekund i en Geigerräknare (registrerar radioaktiva sönderfall) som hålls strax ovanför en korg med trattkantareller plockade utanför Gävle året efter Tjernobylkatastrofen. Ladda filen i matlab och lös samma uppgifer som i uppgift a) [OBS, var noga med att välja rätt frekvensskala].

Analysera och diskutera: Jämför resultatet i uppgifterna a) och b), finns det några skillnader eller likheter? Kan man dra några fysikaliska slutsatser av resultatet? Notera den höga toppen vid noll frekvens i både a) och b), hur kan den förklaras?

Tvådimensionell fouriertransform: I många situationer har man stor nytta av att kunna transformera tvådimensionella funktioner. Ett viktigt exempel där den diskreta tvådimensionella fouriertransformen används är digital bildbehandling, där ett t.ex. $N \times M$ diskreta punkter, pixels, i en bild transformeras till punkter i "frekvensplanet" (notera att det är rums och inte tidskoordinater som transformeras) som

$$F(k,l) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{n,m} e^{i2\pi kn/N} e^{i2\pi lm/M}$$

där f_{nm} är bildens värde (t.ex enligt en gråskala) i punkten n, m. I matlab utförs den diskreta tvådimensionella fouriertransformen med kommandot **fft2**. Studera kapitel 10.8. i matlab-boken och lös följande uppgifter.

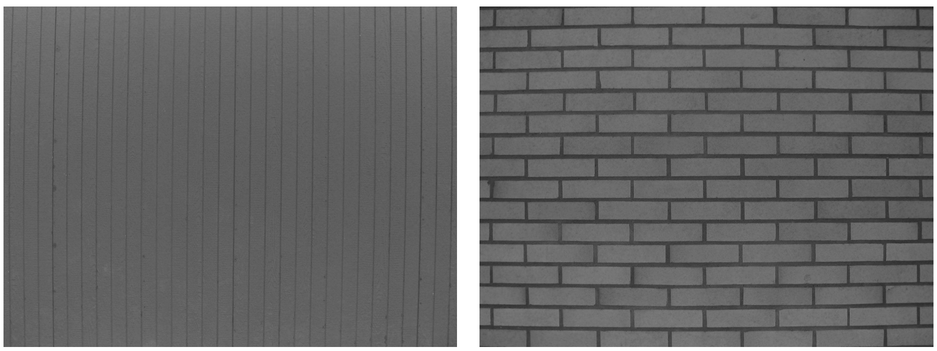

Figure 4: Från vänster till höger, bilderna **vagg1.jpg** och **vagg2.jpg**

I filerna **vagg1.jpg** och **vagg2.jpg** på kurshemsidan finns bilder av en trävägg och en tegelvägg i gråskala, se figur 4. Filerna är i *jpg*-format, ett av de vanligaste bildformaten som t.ex används i många digitalkameror. Bildformatet *jpg* utgör också grunden för filmformatet *mpg*, som t.ex används för att komprimera bilder som sänds över TV's digitala marknät (*jpg*-algoritmen bygger på den diskreta cosinustransformen, en "kusin" till den diskreta fouriertransformen).

a) Ladda ner bilderna och utför fouriertransformen med **fft2** (gör även frekvensskiftningen, se t.ex. exempel 10.12 i matlabboken). Plotta bilderna och absolutbeloppet av deras diskreta fouriertransformer. OBS, välj gråskalan så att ett tydligt mönster av prickar uppträder vid låga frekvenser i plotten av fouriertransformen.

Analysera och diskutera Studera först bilden av träväggen (**vagg1.jpg**) och dess fouriertransform. Beskriv mönstret av prickar i fouriertransformen. Försök förklara mönstret?

b) För att få en bättre förståelse av mönstret kan man notera att träväggen inte ändrar sig märkbart i vertikalled, dvs kolumnerna i matrisen (som beskriver bilden) är ungefär likadana. Lagra värdena från en (valfri) kolumn i en vektor och plotta på samma sätt som i uppgiften för endimensionell fouriertransform ovan värdena i kolumnvektorn samt dess amplitudspektra (dvs använd den endimensionella transformen **fft**).

Analysera och diskutera Beskriv hur amplitudspektrat för kolumnen ser ut. Kan man utifrån denna endimensionella plot förstå varför den tvådimensionella fouriertransformen ser ut som den gör? (Tips: Liknar väggens horisontella struktur någon av de standardfunktioner vi har studerat i kompendiet?)

Innan ni fortsätter, diskutera era slutsater med övningsledaren så att han/hon är införstådd med det ni har kommit fram till.

c) Studera sedan fourietransformen av tegelväggen (**vagg1.jpg**) och diskutera följande.

Analysera och diskutera Beskriv mönstret av prickar i fouriertransformen. På vilket sätt skiljer sig mönstret åt från det för träväggen? Hur kan man förklara detta? Är det någon skillnad på avståndet mellan prickarna i horisotalledd och vertikalledd? Hur kan detta förstås?

Inom bildbehandling är det viktigt att kunna komprimera digitala bilder för att spara överföringstid (eller bandbredd) när bilderna skickas över t.ex internet. Man försöker att ta bort information från bilden som inte “behövs”, i första hand sådant det mänskliga ögat inte kan uppfatta. Den transformerade bilden har ofta ett stort antal komponenter i frekvensdomänen med små amplituder. En enkel komprimering kan göras genom att sätta dessa komponenter till noll och bara lagra information om de nollskiljda komponenterna.

Till vänster i figur 5 finns en bild av fängelseön Alcatraz utanför San Fransisco. Bildfilen **alcatraz.jpg** finns på kurshemsidan. Ladda ner denna bild tillsammans med bilden på tegelväggen (**vagg2.jpg**) och gör följande

Figure 5: Från vänster till höger, bilderna **alcatraz.jpg** och **vaggbert.jpg**

d) Gör en komprimering av bilderna enligt exempel 10.13 och välj komprimeringsparametrarna så att komprimeringsgraden blir 90%, 99% och 99.9%. Plotta de komprimerade bilderna i frekvensdomänen tillsammans med de rekonstruerade, "tillbakatransformerade" bilderna i alla tre fallen (Notera att dessa bilder, som är i *jpg*-format, redan är komprimerade.)

Analysera och diskutera Hur stor komprimeringsgrad kan väljas innan de rekonstruerade bilderna börjar skilja sig avsevärt från orginalen. Blir resultatet olika för de två bilderna, Alcatraz och tegelväggen? Vilka slutsatser kan man dra utifrån detta angående informationsinnehållet i de två bilderna?

Bilder utan ett tydligt periodiskt mönster ger upphov till en kvalitativt annorlunda fouriertransform jämfört med bilder med periodiska mönster. Detta kan studeras genom att studera en bild som innehåller både ett periodiskt mönster och föremål utan periodiskt mönster.

e) Bilden **vaggbert.jpg** till höger i figur 5 visar samma trävägg som ovan men nu med en person, Bert, framför väggen. Ladda ner **vaggbert.jpg** från kurshemsidan och plotta bilden och dess fouriertransform.

Analysera och diskutera Hur skiljer sig den fouriertransformerade bilden från motsvarande resultat i a)? Hur syns Bert i fouriertransformen? Varför?

Ibland vill man förstärka kontrasten i en bild för att lättare se vissa detaljer, t.ex då man som läkare studerar en röntgenbild. Ett enkelt sätt att göra detta är att, som beskrivs i exempel 10.14, högpassfiltrera, d.v.s. sätta de lågfrekventa komponenterna i den transformerade bilden till noll.

f) Följ exempel 10.14 och gör en högpassfiltrering av bilden **alcatraz.jpg**. Gör ett antal plottar där olika många frekvenskomponenter har satts till noll och kommentera skillnaderna mellan bilderna.