Vecka 5

Linjära differentialekvationer lösta med Laplace-transformation

1. $y'' + 3y' - 4y = x$

Vi löser differentialekvationen genom att Laplacetransformera båda sidorna av ekvationen. Vi ersätter y'' med $s^2F(s)$ och ersätter y' med $sF(s)$ och har därmed krävt randvillkoren $y'(0) = 0$ och $y(0) = 0$. I det generella fallet skulle vi ha ersatt med $s^2F(s) - y'(0) - sy(0)$ respektive $sF(s) - y(0)$, se uppgift 2.

Den Laplacetransformerade differentialekvationen blir nu

$$s^2F(s) + 3sF(s) - 4F(s) = \frac{1}{s^2}. \tag{1}$$

Vi löser ekvationen för $F(s)$:

$$(s^2 + 3s - 4)F(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 3s - 4)} = \frac{1}{s^2(s-1)(s+4)} \tag{2}$$

För att kunna göra invers Laplacetransform måste vi partialbråksuppdela högerledet:

$$F(s) = -\frac{1}{4s^2} - \frac{3}{16s} + \frac{1}{5(s-1)} - \frac{1}{80(s+4)} \tag{3}$$

Vi kan nu hitta invers Laplacetransform till alla de fyra termerna och vi får lösningen

$$y(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16} + \frac{1}{5}e^{x} - \frac{1}{80}e^{-4x}. \tag{4}$$

Detta är alltså det resultat vi hade fått om vi löst ekvationen ”som vanligt” med randvillkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

2. $y''' - y = 0$

Löser vi den här ekvationen på samma sätt som ovan och kräver $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ kommer vi få Laplacetransformen

$$s^3F(s) - F(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad (s^3 - 1)F(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 0. \tag{5}$$

Vi kommer med andra ord få den triviala lösningen. Det får man faktiskt för alla homomogena linjära differentialekvationer lösta på det här sättet. I exemplet längst ner beskrivs hur man får samtliga lösningar till en homogen linjär differentialekvation av första ordningen.

3. $\begin{cases} y_1' - 4y_1 + 3y_2 = 3 \\ y_2' - 2y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$

Vi Laplacetransformerar båda ekvationerna med en gång och ersätter $y_{1,2}'$ med $sF_{1,2}(s)$ och har därmed krävt randvillkoren $y_1(0) = y_2(0) = 0$. Laplacetransformen blir

$$\begin{cases} (s-4)F_1(s) + 3F_2(s) = \frac{3}{s} \\ -2F_1(s) + (s+1)F_2(s) = \frac{2}{s} \end{cases} \tag{6}$$

Vi löser detta ekvationssytem för $F_1(s)$ och $F_2(s)$. För att eliminera F_1 multiplicerar vi den undre ekvationen med $\frac{s-4}{2}$ och lägger ihop med den övre och förenklar:

$$(s^2 - 3s + 2)F_2(s) = 2(s-1)\frac{1}{s} \tag{7}$$

Faktorisera andragradspolynomet enligt

$$(s^2 - 3s + 2) = (s-1)(s-2) \tag{8}$$

och (7) blir

$$(s-1)(s-2)F_2(s) = 2(s-1)\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad (s-2)F_2(s) = \frac{2}{s} \quad \Rightarrow \quad F_2(s) = \frac{2}{s(s-2)} \tag{9}$$

Vi partialbråksuppdelar och kan sen hitta en invers Laplacetransform.

$$F_2(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad y_2 = e^{2x} - 1 \tag{10}$$

Vi sätter nu in $F_2(s)$ i den undre ekvationen i (6) och löser för F_1:

$$-2F_1(s) + \frac{2(s+1)}{s(s-2)} = \frac{2}{s} \quad \Rightarrow \quad F_1(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s+1}{s(s-2)} \tag{11}$$

För finna inversa transformen sätter vi först på gemensam nämnare och partialbråksuppdelar sedan:

$$F_1(s) = \frac{-(s-2)+(s+1)}{s(s-2)} = 3\frac{1}{s(s-2)} = \frac{3}{2}\frac{1}{s(s-2)} - \frac{3}{2}\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \tag{12}$$

Så lösningen med randvillkoren $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$ blir alltså

$$\begin{cases} y_1 = \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \\ y_2 = e^{2x} - 1 \end{cases} \tag{13}$$

Exempel: Hitta alla lösningar till $y' - y = 0$ med hjälp av Laplacetransformer.

Istället för att begränsa oss till $y(0) = 0$ tittar vi på Laplacetransformen av derivatan i det allmäna fallet. Vi kallar Laplacetransformen av y' för $\hat{F}(s)$, till skillnad från Laplacetransformen av y som är $F(s)$. Definitionen är:

$$\hat{F}(s) = \int_0^\infty y'(x)e^{-sx}dx \tag{14}$$

Vi partialintegrerar och får

$$\hat{F}(s) = [y(x)e^{-sx}]_0^\infty + \int_0^\infty y(x)se^{-sx}dx \tag{15}$$

Den övre gränsen i klammern försvinner på grund av $e^{-\infty}$ och den undre gränsen blir precis $y(0)$. Vi kan flytta ut s från integralen och det som blir kvar är precis definitionen på Laplacetransformen av y.

$$\hat{F}(s) = (0 - y(0)) + s\int_0^\infty y(x)e^{-sx}dx = -y(0) + sF(s) \tag{16}$$

Vi ser att med $y(0) = 0$ får vi $\hat{F}(s) = sF(s)$ som vi har använt innan. Laplacetransformen av differentialekvationen blir nu

$$\hat{F}(s) - F(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad -y(0) + sF(s) - F(s) = 0 \tag{17}$$

Vi isolerar $F(s)$:

$$(s-1)F(s) = y(0) \quad \Rightarrow \quad F(s) = y(0)\frac{1}{s-1} \tag{18}$$

För att få tillbaka y behöver vi inversa Laplacatransformen, som står listad i häftet.

$$y(x) = y(0)e^x \tag{19}$$

Detta är den allmäna lösningen till differentialekvationen och den sammanfaller med den man får genom den vanliga metoden med karakteristiska polynom.