Laboration i Fourieroptik

David Winge, baserad på tidigare version av
Eva Danielsson och Carl-Martin Sikström

Uppdaterad 16 januari 2017

1 Introduktion

I detta experiment ska vi titta på en verklig avbildning av Fouriertransformen. Detta ska ske med hjälp av en bild som projiceras med hjälp av laserljus. Ljuset går genom en lins och avbildningen ses på en skärm bakom linsen. Fouriertransformen av bilden kommer att uppträda i linsens *fokalplan*. Här kan man filtrera sin bild på önskat vis och se resultatet på skärmen. Avbildningen motsvarar alltså inverstransformationen av Fourier- transformationen.

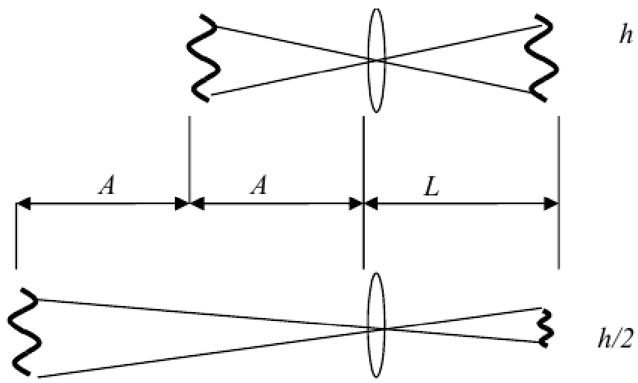
2 Teori

Alla typer av kurvor kan reproduceras med hjälp av ett antal harmoniska vågor med olika amplituder. Detta gäller oavsett kurvans natur; ljus, ljud m m. Vår aktuella bildfunktion består av *spatiella* signaler. Detta innebär att vi i Fourierplanet hittar en funktion av *spatiella frekvenser*. Höga frekvenser motsvarar skarpa detaljer i objektet, t ex raster, och lägre innehåller information om de stora strukturerna. En spatial frekvens har enheten [cykler/grad]. Det anger hur många perioder som ryms i en viss vinkel. Tänk dig en sinusvåg med x perioder, på ett avstånd A från en lins. En avbildning av dessa perioder genom linsen ger en bild av storlek h (motsvarande en vinkel) på avståndet L bakom linsen, se Fig. 1. Den spatiella frekvensen blir x/h. Samma sinusvåg på dubbla avståndet 2A från linsen ger en bild med storleken $h/2$. Den spatiella frekvensen för den mindre bilden är då $2x/h$, alltså en högre frekvens.

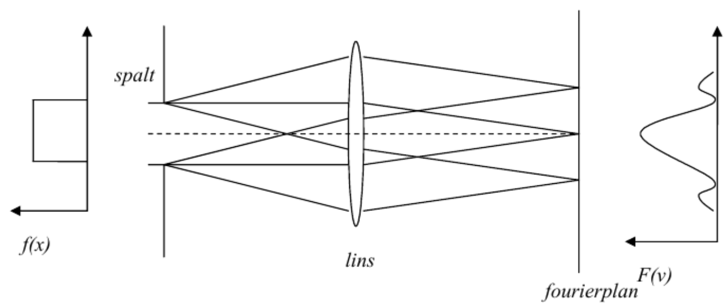
2.1 Ett konkret exempel

Som objekt väljer vi en blockfunktion som kan liknas vid en hatt. En blockfuncktion har ett konstant värde b för ett antal punkter inom ett intervall med längd a och har värdet noll för alla andra punkter. Vi skriver funktionen som

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{om } -a/2 \geq x \geq a/2 \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases} \tag{1}$$



Figur 1: Olika spatiella frekvenser.

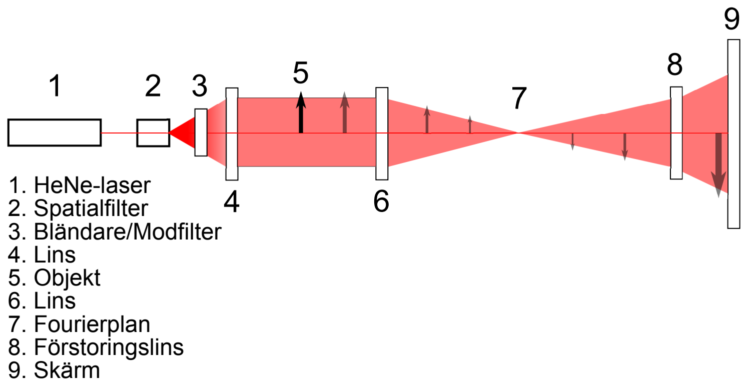


Figur 2: Fouriertransform av en enkelspalt.

Denna funktion kan Fouriertransformeras och skrivas i frekvensrummet som

$$\mathcal{F}(k) = \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x\, b\mathrm{e}^{-ikx} = \frac{2b\sin(ak/2)}{k} \tag{2}$$

där vi nu låter k beskriva den spatiella frekvensen, också kallat *vågtal*. Resultatet är en s k *sinc*-funktion. Sänder man en ljusstråle genom en smal spalt så kommer man få ett resulterande diffraktionsmönster som påminner om sinc-functionen. Alltså, Fouriermönstret från spalten är lika med diffraktionsmönstret. De spatiella frekvenserna fördelas i rummet så att de lägre frekvenserna ligger centralt i Fouriermönstret och de högre syns utåt kanterna. I mitten har vi signalen med $k = 0$, och de positiva och negativa spatiella frekvenserna är sedan fördelade kring nollan. De skarpa kanterna av spalten avbildas m h a de spatiella frekvenserna som finns utåt kanterna i Fouriermönstret, de högre frekvenserna, se Fig. 2. För att ”sudda” kanterna på spaltbilden kan man blockera i ytterkanterna av Fouriermönstret, dvs *lågpassfiltrera*. Avbildningen på skärmen bör då bli lite mer diffus. Detta kan tyvärr vara svårt att avgöra med blotta ögat. Tydligare resultat brukar man få vid *högpassfiltrering*. Då blockerar man de lägre



Figur 3: Schematisk bild av uppställningen.

frekvenserna i mitten och släpper endast igenom de som ger de skarpa kanterna. Bilden blir två smala streck på ett avstånd som tidigare utgjorde bredden på spaltbilden (jfr förberedelseuppgifterna 4.2:1-4).

3 Uppställning

Uppställningen i laborationen är schematiskt beskriven i Fig. 3. En HeNe-laser används för att projicera bilderna som ska studeras. Laserstrålen spatialfiltreras för att få en ”ren” stråle, d v s med bara en mod. En mod kan sägas vara energifördelningen i strålens tvärsnitt.

Efter spatialfiltret blir strålen divergent och för att få parallella strålar igen placeras en lins med fokallängd f efter filtret, se Fig. 3. Objektet som ska avbildas placeras sedan i det parallella strålknippet och tätt intill nästa lins. Denna lins bör ha en längre fokallängd än den första, eftersom Fouriermönstret som ska studeras blir större ju längre brännvidd linsen har och det gör experimenterandet enklare. I Fourierplanet kan man nu utföra sin ”bildbehandling” genom att blockera olika frekvenskomponenter.

Filtreringen genomförs rent praktiskt med hjälp av en liten iris eller en tråd som placeras i centrum av Fourierplanet. Först söker man upp positionen genom att titta efter fokus. En pappersbit i strålen underlättar denna uppgift. Därefter för man in önskat filter i strålen och betraktar resultatet på skärmen. Prova att ”sudda” bilden eller förstärka konturer med respektive filter.

4 Förberedelser innan laborationen

För att vi ska kunna förstå och undersöka den tvådimensionella Fouriertransformen i denna laboration börjar vi med fördel med ett enklare fall, nämligen Fouriertransformen för en dimension. Med hjälp av verktyg i MATLAB kan vi snabbt Fouriertransformera funktioner fram och tillbaka, samt manipulera signalen i processen. Detta kan ge en bättre föreståelse för hur till exempel digitala filter (t ex Gaussian blur i Photoshop) fungerar och hur digitala bilder kan komprimeras. För att göra dessa transformer använder MATLAB *diskret Fouriertransform* som finns väl beskriven på sidan `http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform`.

När man använder MATLAB kan man fråga om hjälp genom att skriva `help [kommando]` där man istället för `[kommando]` skriver den funktion eller det nyckelord man vill ha hjälp med. Detta är ett utmärkt sätt att lära sig syntaxen, och att lära sig läsa programdokumentation. Om du känner dig osäker, testa med något enkelt exempel där du vet vad resultatet ska bli. Kurslitteraturen om MATLAB är mycket nyttig att ha till hands.

4.1 Diskret Fouriertransform

1. Skapa en vektor t och en funktion f. Funktionen får gärna vara periodisk och välj längd på vektorn t så att du får med 2-5 perioder. Exempel på funktioner du kan använda är `sin(t), square(t), sawtooth(t)`. Du kan också skapa egen funktion på annat sätt.

2. Rita funktionen med hjälp av `plot(t,f)`. Denna figur har du sedan som referens när du börjar behandla funktionen på olika vis.

3. Fouriertransformera funktionen f med `fft(f)`.

4. Rita upp fouriertransformen i nytt grafikfönster (`figure` ger nytt fönster), plotta absolutbeloppet av resultatet med `abs`. I den diskreta Fouriertransformen kommer noll-frekvensen, alltså k_0, först. Den följs sedan av de positiva frekvenserna k_1, k_2 o s v. Efter halva intervallet, efter k_n, sker ett hopp till de negativa frekvenserna. Nu kommer k_{-n+1} följt av k_{-n+2} ändå upp till den sista frekvensen k_{-1}.

5. Beskriv vad som händer om du använder `fftshift(`*`Fouriertransformen`*`)`. Vilken frekvens är nu i mitten?

6. Transformera tillbaka till ursprungsfunktionen med `ifft(`*`Fouriertransformen`*`)`. Rita upp resultatet. Blev det bra igen?

4.2 Hög- och lågpassfilter

1. Skapa en funktion som kan sägas motsvara en bild av en spalt. (Dvs en blockfunktion som är antingen 0 eller 1. Observera att `square` ger en funktion som går mellan -1 och 1.)

2. Fouriertransformera din spaltfunktion och ta bort låga frekvenser. Detta är ett så kallat *högpassfilter*. Använd det du lärt dig från tidigare uppgifter.

3. Inverstransformera (med `ifft`) och beskriv vad som händer. Blev det som du förväntat dig? Om inte, testa att ta bort fler eller färre komponenter!

4. Gör på samma sätt ett *lågpassfilter* (här kan du ta bort många komponenter). Hur bör inverstransformen se ut denna gång? Gissa, och rita sedan upp inverstransformen.

4.3 2D transform med MATLAB

För att ge en introduktion till hur den två-dimensionella transformen fungerar ska vi använda det färdigskrivna MATLAB-programmet *Fourier2D* som finns tillgängligt tillsammans med laborationshandledningen. Man startar genom att köra m-filen från MATLAB. Detta program ger oss möjlighet att välja ett 2D-mönster eller bild, transformera till Fourier rummet och sedan tillbaka.

1. Som ett exempel kan vi studera fallet om vi väljer bilden *Prick* i den vänstra listan. Transformen ges i mitten och här kan man också applicera filter liknande de i förra uppgiften. Bilden plottas i relativ skala så ett högpassfilter ger ett radikalt annorlunda resultat. Testa olika filter för denna bild och tolka resultatet.

Detta program kan användas även efter och under labrationen för att ha ett teoretiskt verktyg att jämföra resultaten i laborationen med.

5 Rapportskrivning

Rapporten bör skrivas som en fullständig labbrapport med vedertagna rubriker såsom *Inledning* och *Bakgrund*. Låt det arbete ni gjorde med förberedelseuppgifterna utgöra grunden för ert avsnitt om teori och bakgrund. Här kan ni beskriva hur Fouriertransformen fungerar och vad den kan användas till. Försök på ett naturligt sätt inkludera svaren från förberedelseuppgifterna i er löpande text. Ni kan till exempel ta exempel på vad höga respektive låga frekvenser har för roll i olika funktioner, och hur man i verkligheten kan använda Fouriertransformen inom teknik och vetenskap.

Det bör som vanligt finnas en del där ni beskriver metoden som användes under laborationen, så att försöket kan upprepas av en tredje part och resultaten kan bekräftas. Utöver detta så ska det finnas en resultatdel där de huvudsakliga resultaten presenteras med korta och precisa kommentarer. På detta följer sedan en diskussionsdel där ni mer utförligt förklarar och tolkar resultaten. Försök att återkoppla till teorin och förberedelseuppgifterna även här, för att skapa en sammanhållen och strukturerad text.