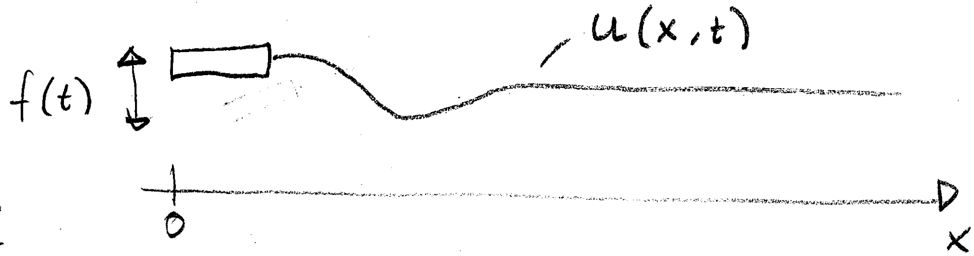
20. Partiella differentialekvationer

Laplaceekvationen praktisk för att studera partiella diff. ekv.

Visa med snöre!

– Vågekvationen (piskSnärt problemet)



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x>0,\ t>0 & \text{(våg. ekv. vibrerande sträng)} \\ u(0,t) = f(t) & \text{(randvillkor)} \\ u(x,0) = 0, \quad u_t'(x,0) = 0 & \text{(begynnelse villkor)} \end{cases}$$

Eftersom piskan är i vila från början är det lämpligt att Laplacetransformera map t. $\Rightarrow$

$$s^2 U(x,s) - c^2 U_{xx}''(x,s) = 0$$

där $\quad U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\, e^{-st}\, dt$

Vi har då fått en ordinär diff.ekvation

$$U_{xx}''(x,s) = \frac{s^2}{c^2} U(x,s)$$

vars lösning är:

$$U(x,s) = a(s)\cdot e^{sx/c} + b(s)\cdot e^{-sx/c}$$

Man har visat att

$a(s)\, e^{sx/c} \longrightarrow$ blir våg som rör sig till vänster

$b(s)\, e^{-sx/c} \longrightarrow$ blir våg som rör sig till höger

Finns ingen vänstergående våg $(x>0)$ så $a(s)=0$

vi får då:

$$U(x,s) = b(s)\, e^{-sx/c}$$

Laplacetransformerar vi randvillkoret:

$$u(0,t) = f(t) \xrightarrow{L}$$
$$U(0,s) = F(s)$$

$\Rightarrow$ $b(s) = F(s)$, så vår lösning blir:

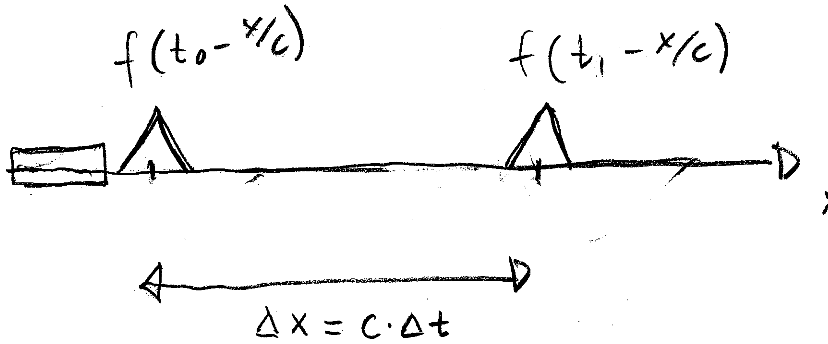
$$U(x,s) = F(s)\, e^{-sx/c}$$

om vi sedan inverstransformerar får vi

$$u(x,t) = f(t - x/c)$$

[Egenskap shiftning: $\int_0^\infty f(t-b)\, e^{-st}\, dt = e^{-sb} F(s)$, då $f(t)=0$ $t<0$]

(Rörelsen av piskans ände fortplantar sig åt höger med hastighet c och oförändrad form.



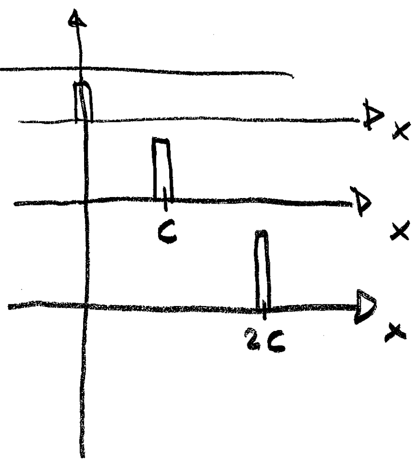
)

$\cancel{f(t+b-x/c)}$

$f(t) = \delta(t)$

$u(x,t) = \delta(t - x/c)$

t	$u(x,t)$
0	$\delta(-x/c)$
1	$\delta(1-x/c)$
2	$\delta(2-x/c)$



hastighet $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c}{1} = c$

Rörelsen av piskans ände fortplantas sig åt höger med hastighet c och oförändrad form.

Egenskap, skiftning

$$\int_0^{\infty} f(t-b)e^{-st}\,dt = \begin{bmatrix} t' = t-b \\ dt' = dt \end{bmatrix}$$

$$= \int_{-b}^{\infty} f(t')\,e^{-s(t'+b)}\,dt'$$

$$= \begin{bmatrix} \text{om } f(t)=0 \text{ då } t<0 \\ \text{och } b>0 \end{bmatrix} = \int_0^{\infty} f(t')\,e^{-st'} \cdot e^{-sb}\,dt'$$

$$= F(s) \cdot e^{-sb}$$