Övningar.
Nanovetenskapliga tankeverktyg.

January 18, 2010

Vecka 2

Komplexa fourierserier

1. Gör en skiss av funktionen

$$f(t) = |t|,\ t \in [-\pi, \pi]$$

(med period 2π) och beräkna dess fourierserie.

2. Gör en skiss av funktionen med period 2

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -1 < t < 0 \\ e^{-t} & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

och bestäm dess komplexa fourierkomponenter.

3. Gör en skiss av funktionen (med period 2)

$$f(t) = t^2,\ t \in [-1, 1]$$

och beräkna dess fourierserie.

Komplexa tal

1. Visa genom att använda $e^{3ix} = (e^{ix})^3$ en formel för $sin(3x)$ uttryckt i enklare trigonometriska formler

Vecka 3

Värmeledningsekvationen

1. Under föreläsningarna har värmeledning i en stav diskuterats, se kapitel 8 i kompendiet. Antag att vi istället isolerar ändarna på staven i värmeledningsexemplet i texten så att ingen energi kan komma igenom. Detta innebär uppenbarligen att energiströmmen genom ändarna är noll eller

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

Visa att detta medför att

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

och fullborda sedan lösningen. Vad händer i detta fall när vi låter tiden t bli mycket stor?

Vecka 4

Fouriertransformen

1. Bestäm fouriertransformen av

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & |t| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{f.ö} \end{cases}$$

2. Bestäm fouriertransformen av

$$f(t) = \begin{cases} |t| & |t| \leq 1 \\ 0 & \text{f.ö} \end{cases}$$

och rita fourierspektret.

3. Visa att om $f(t)$ är reell så gäller $\overline{F(\omega)} = F(-\omega)$.

4. Visa att fouriertransformen av funktionen 1 blir

$$\lim_{T\to\infty} \frac{2\sin(T\omega)}{\omega} = 2\pi\delta(\omega),$$

dvs en extremt bred funktion i t-domänen får en extremt smal fouriertransform.

Deltafunktionen

1. En δ-funktion har egenskapen att

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)\delta(t-b) = f(b)$$

Använd variabelsubstitution och beräkna värdet av

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)\delta(at)$$

2. Ett praktiskt sätt att förstå $\delta(t-a)$ funktionen är att se den som en hög och smal “spik” vid $t = a$. Med denna bild av δ-funktionen, skissa

$$\delta(t^2 - a^2)$$

Utan att genomföra en formell räkning, använd resultatet av problem 1 och försök lista ut värdet av

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)\delta(t^2 - a^2)$$

Vecka 5

Laplacetransformen

1. Bestäm laplacetransformen av

$$f(t) = \sin(at)$$

2. Vad blir laplacetransformen av

$$f(t) = \delta(t-a)$$

3. Bestäm laplacetransformen av fyrkantspulsen

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < a, t > b \\ 1 & a \leq t \leq b \end{cases}$$

4. Vad blir laplacetransformen av trekantspulsen

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq a \\ 2a - t & a \leq t \leq 2a \\ 0 & \text{f.ö} \end{cases}$$

Linjära diffentialekvationer

1. Lös diffentialekvationen

$$y'' + 3y' - 4y = x.$$

2. Lös diffentialekvationen

$$y''' - y = 0.$$

3. Lös systemet av kopplade differntialekvationer

$$\begin{cases} y_1' - 4y_1 + 3y_2 = 3 \\ y_2' - 2y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$$

Vecka 6

Vektorer och nabla

1. Beräkna skalär och vektorprodukt av vektorerna $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$. Beräkna också längden av de båda vektorerna.

2. Man har vektorfältet $\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (x - y, yz, 3z - xy)$. Beräkna $\nabla \cdot \mathbf{a}$ och $\nabla \times \mathbf{a}$.

3. Man har skalärfältet $T(\mathbf{r}) = xyz - xy - yz - zx$. Beräkna ∇T.

4. Visa följande relationer genom direkt räkning med komponenter. Ange i varje fall om resultatet är en vektor eller en skalär.
   a) $\nabla \times (\nabla \phi) = (\nabla \times \nabla)\phi = 0$
   b) $\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi$

5. Visa att $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$

6. $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Visa
   a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
   b) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$
   c) $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}$

7. Visa att $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$ kan väljas som vektorpotential för ett magnetfält $\mathbf{B}$ som är *homogent* i rummet (beror ej på koordinaterna x, y, z) dvs du skall visa att $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Denna identitet är användbar i kvantmekaniken då man studerar en partikels rörelse i ett magnetfält.

8. Visa att $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$ genom direkt koordinaträkning. Visa sedan att detta medför att

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0, \qquad r \neq 0, r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

I origo är $\nabla^2 \frac{1}{r}$ singulär, en s k deltafunktion. Visa att det finns ”någonting” i origo genom att integrera $\nabla^2 \frac{1}{r}$ över en volym som omsluter origo!

Vecka 7

Maxwells ekvationer

1. Beräkna det elektriska fältet inne i och utanfär en kula med totalladdning Q och radie R. Kulan har md en sfäriskt symmetrisk laddningstäthet som fr $r < R$ är proportionell mot $1/r$ och är noll för $r > R$.

2. Beräkna det elektriska fältet utanför en homogent laddad, mycket lång rak tråd som har en laddningstäthet av λ Coulomb/m. Ledning: Utnyttja den axiella symmetrin och lägg en lämplig ytan runt tråden samt använd Gauss' lag.

3. Beräkna det elektriska fältet utanför ett stort homogent laddat plan (laddningstäthet σ Coulomb/m^2). Använd symmetrin och en lämplig Gaussyta.

4. Betrakta två stora parallella plana plattor vardera med arean S, den ena med laddningen Q den andra med laddningen $-Q$. Avståndet mellan plattorna är d. Bestäm det elektriska fältet mellan plattorna och utanför plattorna. Bestäm sedan potentialskillnaden V mellan plattorna och beräkna slutligen plattornas *kapacitans* C definierad av $C = Q/V$. Ledning: Potentialskillnaden mellan två punkter i ett elektromagnetiskt fält ges av

$$V = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

5. Beräkna det magnetiska fältet utanför och inne i en lång rak ledare med cirkulärt tvärsnitt och med radien a i vilken går en ström I homogent fördelad i ledaren.

6. På föreläsningarna har vi beräknat det elektriska fältet inne i och utanför en homogent laddad sfär med radien R och totala laddningen Q. Vi studerar nu en modell av en väteatom där elektronen smetas ut till en sfär med en negativ homogen laddning $-Q$ och radien R.

a) Vad blir kraften på en positiv laddning Q (atomkärnan) som funktion av avståndet från laddningsfördelningens centrum? Vilken typ av rörelse kommer den positiva laddningen att utföra om den sättes på ett litet avstånd frn centrum och sedan släppes fri?

b) På grund av att elektronhöljet har en massa som är mycket mindre än protonens blir det elektronhöljet som oscillerar med en effektiv massa $\approx$ elektronens massa. Beräkna den typiska perioden i den oscillerande rörelsen för denna modell av väteatomen om $R = 50$ pm och $Q = e = 1.6 \times 10^{-19} C$.

7. En ringtransformator består av 1000 varv koppartråd lindad på en lufttom toroidformad kärna. Toroiden är ett rör med innerradien 10 mm som är böjt i en cirkel med medelradien 200 mm. Man har en ström på 1A genom transformatorn. Vad blir magnetfältet mitt i toroidröret? Vad blir fältet utanför spolen?