Svar till övningar.
Nanovetenskapliga tankeverktyg.

January 18, 2010

Vecka 2

Komplexa fourierserier

1. Fourierkomponenterna ges av

$$c_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = 0 \\ \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} & n \neq 0 \end{cases}$$

dvs vi har fourierserien

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \; e^{int} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \; \cos(nt)$$

2. Fourierkomponenterna ges av

$$c_n = \frac{1 - e^{-1}(-1)^n}{2(1 + in\pi)}$$

för alla n.

3. Fourierkomponenterna ges av

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{3} & n = 0 \\ \frac{2(-1)^n}{(\pi n)^2} & n \neq 0 \end{cases}$$

dvs vi har fourierserien

$$f(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} \; e^{in\pi t} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \; \cos(nt)$$

Komplexa tal

1. Man kan skriva

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Vecka 3

Värmeledningsekvationen

Den endimensionella värmeledningsekvationen är

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

Enligt lösningen i kompendiet ansätter vi en separabel funktion

$$T(x,t) = X(x)\Theta(t)$$

där de allmänna lösningarna för rums- och tidsfunktionen är

$$X(x) = A\cos(bx) + B\sin(bx)$$

och

$$\Theta(t) = Ce^{-b^2\kappa t}.$$

De isolerade randvillkoren ger

$$X'(0) = X'(L) = 0$$

vilket leder till $B = 0$ och, i linje med kompendiet,

$$\sin(bL) = 0 \Rightarrow b = \frac{n\pi}{L}$$

vilket ger

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Den allmänna lösningen för $T(x,t)$ kan skrivas som en summa

$$T(x,t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-t\kappa(n\pi/L)^2}.$$

Vid tiden $t = 0$ har vi $T(x,0) = f(x)$. Detta ger koefficienterna C_n enligt

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

När tiden t blir mycket stor är alla termer $n \neq 0$ i summan exponentiellt små och kan försummas. Vi får då

$$T(x, t \to \infty) = \frac{C_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L dx f(x)$$

dvs medelvärdet av funktionen $f(x)$. Fysikaliskt betyder det att den inledande termiska energin nu är jämt fördelad över staven.

Vecka 4

Fouriertransformen

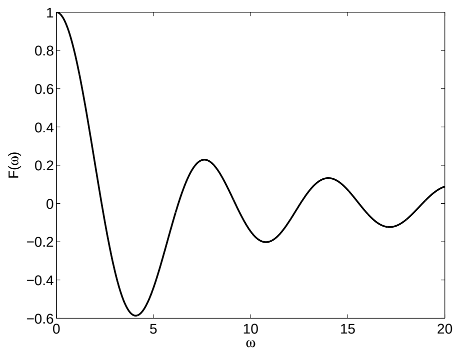
1. Fouriertransformen är

$$\frac{2\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}$$

2. Fouriertransformen är

$$\frac{2\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega^2}+\frac{2\sin(\omega)}{\omega}$$

Spektrat visas i figuren nedan.



4. Vi har

$$F_T(\omega)=\int_{-T}^{T}e^{i\omega t}=\frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$

och (se kompendiet, s. 17)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\omega T)}{\omega}=\delta(\omega)$$

Deltafunktionen

1. Vi får

$$\frac{1}{|a|}f(0)$$

2. Vi får

$$\frac{1}{2|a|}\left[f(a)+f(-a)\right]$$

Vecka 5

Laplacetransformen

1. Laplacetransformen är
$$\frac{a}{s^2 + a^2}$$
2. Laplacetransformen blir (för $a > 0$)
$$e^{-sa}$$
3. Laplacetransformen är (för $a > 0$)
$$\frac{1}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$$
4. Laplacetransformen blir
$$\frac{1}{s^2}\left(e^{-as} - 1\right)^2$$

Linjära differentialekvationer

1. Den allmänna lösningen är summan av homogenlösningen och partikulärlösningen
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$
Den homogena lösningen y_h fås genom den karaktäristiska ekvationen
$$r^2 + 3r - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -4$$
Detta ger homogenlösningen
$$y_h = Ae^x + Be^{-4x}.$$
Partikulärlösningen fås genom en ansats
$$y_p = Cx + D.$$
Insatt i differentialekvationen ger detta
$$-4Cx + 3C - 4D = x \Rightarrow C = -1/4,\ D = -3/16$$

Vi får då den allmänna lösningen

$$y = Ae^x + Be^{-4x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{16}$$

2. Differentialekvationen är homogen. Den karaktäristiska ekvationen är

$$r^3 = 1, \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = e^{i2\pi/3} = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right),\ r_3 = e^{i4\pi/3} = \frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$$

Detta ger den allmänna lösningen

$$y = Ae^x + Be^{x/2(-1+i\sqrt{3})} + Ce^{x/2(-1-i\sqrt{3})}$$

$$= Ae^x + e^{-x/2}\left[D\cos(\sqrt{3}x/2) + E\sin(\sqrt{3}x/2)\right]$$

3. Från den översta ekvationen kan vi lösa ut y_2 och får

$$y_2 = \frac{1}{3}(3 + 4y_1 - y_1')$$

Detta kan sedan stoppas in i den understa ekvationen, vilket ger

$$y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = -3$$

Denna differentialekvation har homogenlösningen

$$y_{1h} = Ae^x + Be^{2x}$$

och partikulärlösningen

$$y_{1p} = -3/2$$

Vi får alltså den allmänna lösningen för y_1

$$y_1 = Ae^x + Be^{2x} - \frac{3}{2}$$

Den allmänna lösningen för y_2 fås genom att sätta in resultatet för y_1 i ekvationen ovan som ger y_2 som funktion av y_1, vilket ger

$$y_2 = Ae^x + \frac{2}{3}Be^{2x} - 1$$

Vecka 6

Vektorer och Nabla

1. Vi har skalärprodukten

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 32,$$

vektorprodukten

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-3, 6, -3)$$

och längderna

$$\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{14}, \quad \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{77}$$

2. Vi får

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 4 + z$$

och

$$\nabla \times \mathbf{a} = (-x - y, y, 1)$$

3. Vi får

$$\nabla T = (yz - y - z, xz - x - z, xy - x - y)$$

4. Observera att ϕ och Φ är skalärer. Vi får att

$$\nabla \times (\nabla \times \phi)$$

är en nollvektor och

$$\nabla^2 \Phi$$

är en skalär.

8. Vi integrerar fuktionen $\nabla^2(1/r)$ över en sfär med volymen V som omsluter origo

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV$$

Genom att använda Gauss sats kan vi omvandla volymintegralen till en ytintegral över sfärens yta S

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV = \int_V \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right) dV = \int_S \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

Vi använder sedan att

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{(x, y, z)}{r^3} = -\frac{r\mathbf{e}_r}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

där $\mathbf{e}_r$ är enhetsvektorn som pekar i samma riktning som $\mathbf{r}$, dvs $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$. Vinkelelementet

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r dS$$

pekar i samma riktning $\mathbf{e}_r$ vilket ger $[\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1]$

$$\int_S \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{R^2} \int_S dS = -\frac{4\pi R^2}{R^2} = -4\pi$$

Notera att sfärens radie R inte spelar någon roll. Eftersom integralen inte är noll finns det alltså "något" i origo.

Vecka 7

Maxwells ekvationer

1. Det elektriska fältet är

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}\mathbf{e}_r & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r & r > R \end{cases}$$

där enhetsvektorn $\mathbf{e}_r$ pekar ut från kulans centrum.

2. Det elektriska fältet är

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\mathbf{e}_r$$

där enhetsvektor $\mathbf{e}_r$ pekar vinkelrätt ut från tråden och r är avståndet från tråden.

3. Det elektriska fältet är

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{e}_r$$

oberoende av avståndet från planet. Enhetsvektorn $\mathbf{e}_r$ pekar vinkelrätt ut från planet.

4. Det elektriska fältet blir

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{S\epsilon_0}\mathbf{e}_r & \text{mellan plattorna} \\ 0 & \text{utanför plattorna} \end{cases}$$

där enhetsvektorn $\mathbf{e}_r$ pekar vinkelrätt ut från plattan med laddningen Q, mot plattan med laddningen $-Q$. Potentialskillnaden mellan plattorna blir

$$V = \frac{Qd}{S\epsilon_0}$$

Kapacitansen blir

$$C = \frac{S\epsilon_0}{d}$$

5. Det magnetiska fältet är

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{a^2}\mathbf{e}_\theta & r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta & r > a \end{cases}$$

där enhetsvektorn $\mathbf{e}_\theta$ pekar i tangentens riktning utefter den cirkel som omsluter ledaren.

6. a) Kraften $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Det elektriska fältet $\mathbf{E}(r)$ ges i föreläsningskompendiet. Vi får kraften

$$\mathbf{F}(r) = \begin{cases} -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}\mathbf{e}_r & r < R \\ -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r & r > R \end{cases}$$

där enhetsvektorn $\mathbf{e}_r$ pekar ut från sfärens centrum.

b) **Överkurs**. Om vi begränsar oss till rörelse inne sfären har vi

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}\mathbf{e}_r$$

Newtons lag (från mekaniken) ger

$$\mathbf{F}(r) = m\mathbf{a}(r)$$

där m är elektronmassan och $\mathbf{a}(r)$ är accelerationen. Accelerationen sker (av symmetriskäl) endast i radiell led. Vi får då rörelseekvationen

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr, \quad k = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Denna differentialekvation har oscillerande, harmoniska lösningar (se t.ex värmeledningsekvationen, uppgift V.3.), en rörelse fram och tillbaka genom centrum med vinkelfrekvensen $\omega = \sqrt{k/m}$, d.v.s. perioden

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{m4\pi\epsilon_0 R^3}}{Q}$$

7. Magnetfältet inne toroiden blir

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

där μ är permeabiliteten i vakuum, $N = 1000$ varv och $L = 2\pi r$, där $r =$ 200mm är spolens radie. Om spolen är perfekt lindad bli magnetfältet noll utanför spolen.